ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 95 (1996), 281-299

# TWO LETTERS ON QUATERNIONS AND MODULAR FORMS (mod $p$)

BY

J-P. SERRE

*Collège de France*

with introduction, appendix and references by R. Livné,

*The Hebrew University of Jerusalem*

ABSTRACT

We present two letters of J-P. Serre to Tate and to Kazhdan. The first indicates an approach to modular forms (mod $p$) through quaternions. The second discusses the theory of representations of local and adelic groups associated to these quaternions in characteristic $p$.

## Introduction (R. Livné, November 1995)

In August 1987 Serre wrote a letter to Tate in which he sketched a quaternion approach to modular forms modulo a prime $p$. The quaternions enter when evaluating the modular forms at supersingular elliptic curves. This approach was developed by Serre in his subsequent course at the Collège de France (1987–1988); however, the details have not appeared, except for a brief résumé [12]. Hence it seems useful to publish this letter together with another one, written to Kazhdan in June 1989, which also sketches work done in August 1987 and presented at the same course at the Collège de France. In this second letter Serre uses representations (mod $p$) of adèle groups to show that the mod $p$ theory is very different from the complex one. Irreducible modules are not the main object of interest: non-Eisenstein systems of Hecke-eigenvalues (mod $p$) are associated with modules of infinite length. Of independent interest is the study of certain universal unramified representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ for $\ell \neq p$.

Received December 20, 1995

A few short paragraphs were deleted from the letters. They are indicated by dots (...). Some changes and a few comments regarding the problems posed in the letter to Tate are in brackets [ ], and there are a few unmarked cosmetic changes. These modifications were made by Serre for the present publication; I added a bibliography, and an appendix with some additional remarks. I thank B. Gross and K. Ribet for their comments, and I apologize for any omissions or inaccuracies.

## Lettre de J-P. Serre à J. Tate, 7 août 1987

Cher Tate,

J'ai le sentiment de comprendre un peu mieux les formes modulaires (mod $p$), ainsi que nos chers $W_k = M_k/M_{k-(p-1)}$ de 1973 et 1974.

Je suis parti du problème suivant: comment interpréter de façon adélique les formes modulaires (mod $p$), de tout niveau et de tout poids? (C'est la question 2, p. 198, de mon article du *Duke Math. J.*, t. 54 — celle "pour optimistes".) Plus précisément, on s'intéresse aux valeurs propres $(a_\ell)$ des opérateurs de Hecke $T_\ell$ ($\ell \neq p$, $\ell$ premier au niveau) fournies par ces formes modulaires. Voici la réponse (ou en tout cas *une* réponse ... ):

Soit $D$ le corps de quaternions sur $\mathbf{Q}$ ramifié en $\{p,\infty\}$ et soit $D_A^\times$ le groupe adélique du groupe multiplicatif $D^\times$. Alors:

THÉORÈME: *Les systèmes de valeurs propres* $(a_\ell)$ (avec $a_\ell \in \overline{\mathbf{F}}_p$) *fournis par les formes modulaires* (mod $p$) *sont* les mêmes *que ceux obtenus à partir des fonctions* $f\colon D_A^\times/D_{\mathbf{Q}}^\times \to \overline{\mathbf{F}}_p$ *qui sont localement constantes.*

(L'action des $T_\ell$ sur ces fonctions se définit de façon à peu près évidente, à cela près que l'on met un facteur $1/\ell$ devant l'opérateur de Hecke naïf.)

Les fonctions $f$ du type ci-dessus peuvent aussi se voir comme des fonctions $f\colon D_A^\times \to \overline{\mathbf{F}}_p$ telles que

$$f(ux\gamma) = f(x) \tag{1}$$

pour tout $\gamma \in D_{\mathbf{Q}}^\times$ et tout $u$ dans un sous-groupe ouvert de $D_A^\times$. Note qu'un sous-groupe ouvert contient la composante réelle $D_{\mathbf{R}}^\times$, qui est connexe. On peut donc supprimer $D_{\mathbf{R}}^\times$ si l'on veut, i.e. travailler avec l'anneau $A_f$ des adèles finis.

*Démonstration du théorème:* Je fixe un niveau $N \geq 3$, premier à $p$, et je travaille avec des formes modulaires (mod $p$) de niveau $N$, comme le fait Katz dans Anvers III (LN 350). La courbe modulaire correspondante n'est pas absolument connexe; tant pis! Par définition, une forme de poids $k$, à coefficients dans $\overline{\mathbf{F}}_p$, associe à tout couple $(E, \alpha)$, où $E$ est une courbe elliptique et $\alpha$ une $N$-structure sur $E$, un élément $f(E, \alpha)$ de $\omega^k(E)$, i.e. une forme différentielle (invariante) de poids $k$ sur $E$. C'est aussi, si l'on veut, une section d'un certain faisceau $\mathcal{M}_k$ sur la courbe modulaire $X(N)$. Je noterai $M_k(N)$, ou simplement $M_k$, l'espace de ses sections:

$$M_k = H^0(X(N), \mathcal{M}_k).$$

D'après Swinnerton-Dyer (pour $p \geq 5$) et Katz (pour $p = 2, 3$), il y a un plongement naturel $M_{k-(p-1)} \to M_k$ donné par la multiplication par une certaine forme $A$ de poids $p - 1$ (à savoir $E_{p-1}$ si $p \geq 5$, $b_2$ si $p = 3$ et $a_1$ si $p = 2$).

En 1973–1974, nous nous sommes beaucoup intéressés à la structure du quotient

$$W_k = M_k / M_{k-(p-1)},$$

vu comme module sur les opérateurs de Hecke $T_\ell$, $(\ell, pN) = 1$.

D'un point de vue faisceautique, cela revient à regarder la suite exacte

$$0 \to \mathcal{M}_{k-(p-1)} \xrightarrow{A} \mathcal{M}_k \to \mathcal{S}_k \to 0,$$

où $\mathcal{S}_k$ est le conoyau de la multiplication par $A$. Comme $A$ s'annule aux points supersinguliers avec multiplicité 1, la structure du faisceau $\mathcal{S}_k$ est claire: il est 0 en dehors des points supersinguliers ("$\mathcal{S}$" ="supersingulier"), et de dimension 1 en ces points-là. Appelle $S_k$ l'espace des sections de $\mathcal{S}_k$. On a la suite exacte

$$0 \to M_{k-(p-1)} \to M_k \to S_k \to H^1(\mathcal{M}_{k-(p-1)}) \to H^1(\mathcal{M}_k) \to 0,$$

ou encore:

$$0 \to W_k \to S_k \to H^1(\mathcal{M}_{k-(p-1)}) \to H^1(\mathcal{M}_k) \to 0. \tag{2}$$

On a ainsi plongé $W_k$ dans l'espace un peu plus grand $S_k$; les deux espaces sont d'ailleurs égaux si $k > p + 1$ car alors le groupe $H^1(\mathcal{M}_{k-(p-1)})$ est 0 (dualité).

L'espace $S_k$ est bien plus facile à décrire concrètement que son sous-espace $W_k$: par construction même, c'est l'espace des fonctions courbe supersingulière sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ munie d'une $N$-structure

$$f \downarrow$$

forme différentielle invariante de poids $k$ sur la courbe.

L'action des opérateurs de Hecke $T_\ell$ sur $S_k$ est non moins évidente. Si $f(E,\alpha)$ est une fonction comme ci-dessus (avec $E$ supersingulière), on a

$$(f|T_\ell)(E,\alpha) = \frac{1}{\ell}\sum_C f(E/C,\alpha_C), \tag{3}$$

où $C$ parcourt les $\ell+1$ sous-groupes de $E$ d'ordre $\ell$, où $\alpha_C$ désigne la $N$-structure de $E/C$ déduite de $\alpha$, et où je me permets d'identifier les formes différentielles sur $E/C$ à celles sur $E$, grâce à l'isogénie $E \to E/C$. Bref, c'est comme d'habitude!

Bien entendu, cette action des $T_\ell$ sur $S_k$ prolonge celle sur $W_k$.

*Remarques:*

(4) *Les* $S_k$ *ne dépendent que de* $k$ modulo $p^2-1$ (et de $N$ et $p\ldots$).

En effet toute courbe supersingulière sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ a une structure canonique (et fonctorielle) sur $\mathbf{F}_{p^2}$, à savoir celle où son Frobenius est égal à $-p$. L'espace tangent à $E$ a donc lui aussi une $\mathbf{F}_{p^2}$-structure canonique, et sa puissance tensorielle $(p^2-1)$-ième a une base canonique. Cette base permet d'identifier $\omega^k(E)$ à $\omega^{k+p^2-1}(E)$, et cette identification est compatible avec les isogénies, donc avec les opérateurs $T_\ell$. (Nous connaissions déjà ce résultat pour les $W_k$ avec $k$ assez grand; d'ailleurs les $S_k$ ne sont rien d'autres que les "stabilisés" des $W_k$, comme diraient les topologues.)

[Base canonique de $\omega^{p^2-1}(E)$ pour $E$ supersingulière:
Ecrivons $E$ sous forme standard:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

et posons $\omega = dx/(2y + a_1x + a_3)$.

Si $p = 2$, la base canonique de $\omega^{p^2-1}(E)$ est $a_3\omega^{\otimes 3}$.

Si $p = 3$, c'est $b_4^2\omega^{\otimes 8}$, avec $b_4 = a_1a_3 + 2a_4$.

Si $p \geq 5$, c'est $B^{p-1}\omega^{\otimes(p^2-1)}$, où $B$ est la série d'Eisenstein $E_{p+1}$.]

*Autre formule utile* (mais je n'en aurai pas besoin pour l'instant):

$$S_{k+p+1} \cong S_k[1], \quad \text{où } [1] \text{ désigne un "Tate twist".} \tag{5}$$

Cette formule sera évidente plus tard, du point de vue quaternionien. Ici encore, nous la connaissions — à semi-simplification près, toutefois — pour les

$W_k$ avec $k$ assez grand. D'après G. Robert (*Invent. math.* **61** (1980), p. 123), l'isomorphisme $S_k[1] \to S_{k+p+1}$ s'obtient par la multiplication par $B = E_{p+1}$ si $p \geq 5$. Il y a des constructions analogues pour $p = 2$ et $p = 3$.

[Si $p = 2$, on choisit dans $M_3$ un élément $A_3$ dont l'image dans $S_3 = M_3/M_2$ est l'élément "$a_3$" ci-dessus (un tel élément existe du fait que $N \geq 3$); la multiplication par $A_3$ donne l'isomorphisme cherché $S_k[1] \to S_{k+3}$.

Si $p = 3$, même chose en utilisant l'élément $b_4 = a_1a_3 + 2a_4$ de $S_4$.]

(6) *Tout système $(a_\ell)$ de valeurs propres des $T_\ell$ provenant d'un $M_k$ provient aussi d'un $S_{k'}$ et inversement.*

(Le poids $k'$ peut être différent du poids $k$, mais on a en tout cas

$$k' \equiv k \pmod{p-1}.)$$

C'est clair: si $(a_\ell)$ provient de $f \in M_k$, on écrit $f$ sous la forme $A^m g$, avec $g$ non divisible par $A$; l'image de $g$ dans $S_{k'}$, où $k' = k - m(p-1)$, est non nulle et correspond à $(a_\ell)$. Inversement, si $(a_\ell)$ provient d'un $S_k$, on peut, grâce à la périodicité des $S_k$, supposer que $k \geq p+1$, auquel cas $S_k$ est quotient de $M_k$ et $(a_\ell)$ provient donc de $M_k$.

*Conclusion:* au lieu de regarder les $T_\ell$ sur les $M_k$, pour $k = 0, 1, \ldots$, il suffit de les regarder sur les $S_k$, où $k$ parcourt les entiers mod $(p^2-1)$. Cela incite à fabriquer l'espace somme:

$$S(N) = \bigoplus_{k \bmod (p^2-1)} S_k(N). \tag{7}$$

(8) Tu vois maintenant ce qu'on va faire: on va interpréter $S(N)$ comme *un espace de fonctions sur $D_A^\times/D_\mathbf{Q}^\times$*, en exploitant la correspondance bien connue entre courbes supersingulières et quaternions.

De façon plus précise, choisissons un ordre maximal $D_\mathbf{Z}$ de $D = D_\mathbf{Q}$, et posons:

$O_p = \mathbf{Z}_p \otimes D_\mathbf{Z}$ = unique ordre maximal de $D_p = \mathbf{Q}_p \otimes D_\mathbf{Z}$;

$O_p^\times$ = groupe multiplicatif de $O_p$;

$O_p^\times(1)$ = noyau de $O_p^\times \to \mathbf{F}_{p^2}^\times$, i.e. noyau de la réduction $(\bmod\, \pi)$, où $\pi$ est une uniformisante de $O_p$;

$O_\ell = \mathbf{Z}_\ell \otimes D_\mathbf{Z}$, isomorphe à l'algèbre de matrices $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_\ell)$, $\ell \neq p$;

$O_\ell^\times$ = groupe multiplicatif de $O_\ell \simeq \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$;

$O_\ell^\times(N)$ = sous-groupe du précédent formé des éléments $\equiv 1 \pmod{\ell^n}$, où $\ell^n$ est la plus grande puissance de $\ell$ divisant $N$;

$U(1,N) = D_{\mathbf{R}}^\times \times O_p^\times(1) \times \prod_{\ell \neq p} O_\ell^\times(N)$, sous-groupe ouvert de $D_A^\times$.

Considère alors l'ensemble fini $\Omega_N = U(1,N)\backslash D_A^\times / D_{\mathbf{Q}}^\times$. L'énoncé suivant ne te surprendra pas:

(9) *Il existe une bijection* (presque canonique, mais pas tout à fait, cf. ci-dessous) *entre $\Omega_N$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets $(E,\omega,\alpha)$, où $E$ est une courbe supersingulière sur $\overline{\mathbf{F}}_p$, $\omega$ une forme différentielle invariante $\neq 0$ sur $E$ rationnelle sur $\mathbf{F}_{p^2}$, et $\alpha$ une $N$-structure sur $E$.* (De plus, cette bijection est compatible avec quantité d'opérateurs plus ou moins évidents, et notamment avec les correspondances $T_\ell$.)

Admettons (9), qui n'est qu'un exercice [voir plus loin]. On en déduit:

(10) *L'espace $S(N) = \bigoplus S_k(N)$ défini dans* (7) *est isomorphe à l'espace des fonctions sur $\Omega_N$, cet isomorphisme étant compatible avec*:

a) *l'action des $T_\ell$, pour $\ell \nmid pN$;*

b) *la décomposition par rapport au poids* $\bmod (p^2-1)$.

(Du côté $\Omega_N$, le "poids" provient de l'action naturelle de $O_p^\times / O_p^\times(1) = \mathbf{F}_{p^2}^\times$ sur $\Omega_N$.)

En d'autres termes, on peut interpréter $S(N)$ comme l'espace des fonctions $f\colon D_A^\times \to \overline{\mathbf{F}}_p$ telles que $f(ux\gamma) = f(x)$ si $u \in U(1,N)$, $\gamma \in D_{\mathbf{Q}}^\times$. Et la réunion des $S(N)$, pour $N$ de plus en plus grand, s'identifie à l'espace $V_1$ des fonctions localement constantes sur $D_A^\times / D_{\mathbf{Q}}^\times$ qui sont invariantes par $O_p^\times(1)$.

Pour achever de démontrer le théorème énoncé au début, il me reste à expliquer pourquoi la condition d'invariance par $O_p^\times(1)$ est inoffensive. Cela tient tout simplement à ce que $O_p^\times(1)$ est un *pro-p-groupe invariant* dans $D_p^\times$, donc dans $D_A^\times$. On a en effet le lemme suivant:

LEMME: *Soit $G$ un pro-p-groupe opérant de façon continue sur un espace vectoriel $V$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p$, et soient $T_\ell$ des endomorphismes de $V$ commutant à $G$. Soit $(a_\ell)$ un système de valeurs propres des $T_\ell$ correspondant à un vecteur propre commun $v \neq 0$ dans $V$. On peut alors choisir $v$ invariant par $G$* (sans changer les $(a_\ell)$).

(Si $V_a$ est le sous-espace propre de $V$ correspondant à $(a_\ell)$, $V_a$ est $\neq 0$ et est stable par $G$, donc contient un vecteur $\neq 0$ fixé par $G$.)

Voilà, en gros, la démonstration du théorème. Pour être complet, il me faut donner des détails sur la démonstration de (9). C'est un point un peu embêtant, mais essentiellement trivial. L'une des façons de procéder consiste à interpréter les éléments de $\Omega_N = U(1,N)\backslash D_A/D_{\mathbf{Q}}$ comme des *classes d'isomorphisme de $D_{\mathbf{Z}}$-modules projectifs de rang* 1, *munis de "$\pi N$-structures"*. (Si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère non nul de $D_{\mathbf{Z}}$, une "$\mathfrak{a}$-structure" sur un $D_{\mathbf{Z}}$-module projectif $P$ est simplement une *base* de $P/\mathfrak{a}P$ comme $D_{\mathbf{Z}}/\mathfrak{a}$-module.) On choisit ensuite un triplet $(E,\omega,\alpha)$ avec $\mathrm{End}(E) = D_{\mathbf{Z}}$, et l'on remarque que, si $P$ est un $D_{\mathbf{Z}}$-module projectif de rang 1 muni d'une $\pi N$-structure, la courbe elliptique $E_P = E\otimes_{D_{\mathbf{Z}}} P$ est munie automatiquement d'un $\omega$ et d'un $\alpha$. La correspondance

$$\text{classe de } P \mapsto \text{classe de } (E_P,\omega,\alpha)$$

est bijective, on le voit facilement (le point essentiel est, bien sûr, que deux courbes supersingulières sont isogènes). J'ai la flemme de donner davantage de détails.

*Quelques compléments:*

(11) L'action de $D_p^\times$ sur l'espace $S(N)$ est une action "de type diédral"; en particulier, une uniformisante $\pi$ de $D_p^\times$ *échange* $S_k$ *et* $S_{pk}$, qui sont donc isomorphes en tant que $(T_\ell)$-modules (ce que nous savions bien, grâce à l'opérateur $V$ de la théorie usuelle). On peut aussi voir ça en termes de modules projectifs munis de $\pi N$-structures: à un tel module $P$ on associe son unique sous-module d'indice $p^2$, muni de la $\pi N$-structure évidente (pas tout à fait évidente, en ce qui concerne la $\pi$-structure ... il faut réfléchir un peu).

(12) On peut utiliser *l'action du centre de* $D_A^\times$ pour décomposer l'espace des fonctions sur $D_A^\times/D_{\mathbf{Q}}^\times$ comme on le fait dans le cas complexe. Les caractères centraux qui interviennent ici sont triviaux à l'infini. Ce sont des caractères $\varpi$: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \overline{\mathbf{F}}_p^\times$. On les décompose en $\chi^k\varepsilon$, où $\chi$ est le caractère cyclotomique habituel (mod $p$), et $\varepsilon$ est de conducteur premier à $p$; l'entier $k$ est défini mod $(p-1)$, et il est de même parité que $\varepsilon$ si $p \neq 2$. Si un $(a_\ell)$ est donné par une fonction propre associée à $\varpi = \chi^k\varepsilon$, la représentation galoisienne correspondante $\rho_a$ est telle que

$$\det \rho_a = \chi^{-1}\varpi = \chi^{k-1}\varepsilon.$$

(Il y a donc "torsion par $\chi^{-1}$" par rapport à ce que donnerait une correspondance à la Langlands. Dans le langage de Deligne (LN 349, pp. 99–100) il s'agit d'une correspondance "à la Hecke", à moins que ce ne soit "à la Tate" ...)

(13) Si $\psi$: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ est un caractère quelconque, en composant $\psi$ avec la norme réduite Nrd : $D_A^\times \to A^\times$, on obtient une fonction sur $D_A^\times/D_\mathbf{Q}^\times$, que je noterai $\psi_D$. C'est une fonction propre des $T_\ell$, les valeurs propres étant $(1+\ell^{-1})\psi(\ell)$, pour $\ell$ premier au conducteur de $\psi$; la représentation galoisienne correspondante est $\chi^{-1}\psi \oplus \psi$: type Eisenstein. Le caractère central est $\psi^2$.

La fonction $\psi_D$ peut être utilisée pour *tordre* un système de valeurs propres. En effet, si $f$ est une fonction localement constante sur $D_A^\times/D_\mathbf{Q}^\times$, on a:

$$(f.\psi_D)|T_\ell = \psi(\ell)(f|T_\ell).\psi_D.$$

Le cas particulier $\psi = \chi$ est particulièrement intéressant: la fonction $\chi_D$ correspondante appartient à $S_{p+1}$, et la formule ci-dessus montre que *l'application $f \mapsto f.\chi_D$ est un isomorphisme de $S_k[1]$ sur $S_{k+p+1}$*, conformément à (5). (Cette démonstration est très voisine de celle de G. Robert, *loc.cit.*, p. 124, lemme 7.)

(14) Je reviens sur la suite exacte (2) du début:

$$0 \to W_k \to S_k \to H^1(\mathcal{M}_{k-(p-1)}) \to H^1(\mathcal{M}_k) \to 0. \tag{2}$$

On peut déterminer les $H^1$ par dualité : $H^1(\mathcal{M}_k)$ est dual de $H^0(\Omega \otimes \mathcal{M}_{-k})$. Comme $\Omega$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{M}_2^0$ des formes paraboliques de poids 2, $\Omega \otimes \mathcal{M}_{-k}$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{2-k}^0$. On transforme ainsi (2) en la suite exacte

$$0 \to W_k \to S_k \to \text{dual de } M_{p+1-k}^0 \to \text{dual de } M_{2-k}^0 \to 0. \tag{2'}$$

Quelle est la structure de $(T_\ell)$-module du dual de $M_{p+1-k}^0$ compatible avec cette suite exacte ? On aurait envie de dire (mais je ne sais pas le démontrer) que ce module est, peut-être à semi-simplification près, un *tordu* de $M_{p+1-k}^0$, la seule torsion raisonnable étant d'ailleurs:

$$M_{p+1-k}^0[k-1]. \tag{15}$$

Tu avais obtenu toi-même un résultat de ce genre lors de ta démonstration du fait que tout système de valeurs propres se ramène par torsion à un poids $\leq p+1$. (Inversement, si une formule du genre ci-dessus était vraie, cela démontrerait très simplement ce résultat de torsion: utilisant (5), on se mettrait dans un $S_k$ avec $1 \leq k \leq p+1$ et on utiliserait ensuite (2').

Pour démontrer (15), il faudrait avoir le courage d'écrire le comportement du théorème de dualité vis-à-vis des correspondances. Pas drôle! Je m'en dispense pour le moment.

Je voudrais maintenant te parler des *problèmes* qui se posent. Il y en a une grande quantité. Voici les principaux:

(16) *Comment décrire le sous-espace* $W_k$ *de* $S_k$ $(0 < k \leq p+1)$ *en termes quaternioniens*, i.e. en termes de fonctions sur l'espace $D_A^\times / D_{\mathbf{Q}}^\times$? On aurait assez envie que les $W_k$, et leurs transformés par $D_A^\times$, engendrent un joli $D_A^\times$-sous-module, mais comment le caractériser? Faut-il faire intervenir les fonctions invariantes, non pas par $O_p^\times(1)$, mais par $O_p^\times(n)$, $n \geq 2$ ? Je ne vois rien.

Une question voisine est celle de définir l'opérateur "$U_p$" d'Atkin en termes quaternioniens. Note que $U_p$ ne peut pas être défini sur $S_k$ tout entier, car il est stablement nul; mais on devrait pouvoir le définir sur les $W_k$ pour $1 < k \leq p+1$.

(17) On aimerait savoir définir directement la représentation galoisienne

$$\rho_a\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathbf{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$$

attachée à un système $(a_\ell)$ de valeurs propres des $T_\ell$. Il n'est pas sûr que ce soit là une question raisonnable. Mais on aimerait en tout cas savoir ceci: si un système $(a_\ell)$ provient d'une fonction propre $f \in S_k$, est-il vrai qu'il ne peut provenir d'un $S_{k'}$ que si l'on a:

$$k' \equiv k \text{ ou } pk \pmod{p^2-1}\ ? \tag{18}$$

Hélas, (18) semble faux pour un système $(a_\ell)$ de type Eisenstein, i.e. correspondant à une représentation $\rho_a$ qui est réductible. Mais j'ai l'espoir que c'est vrai lorsque $\rho_a$ est irréductible. Si c'était le cas, $\rho_a$ déterminerait le couple $(p, pk) \bmod (p^2-1)$, ce qui constituerait un "théorème de multiplicité 1" pour la $p$-composante. De plus, si $k(\rho_a)$ désigne le poids attaché à $\rho_a$ par les règles un peu biscornues de *Duke Math. J.*, t. 54, on aurait:

(19) $k(\rho_a) =$ l'un des deux entiers (ou l'unique entier) de l'intervalle $[1, p^2-1]$

congrus à $k$ ou $pk \bmod (p^2-1)$.

Cela expliquerait pourquoi les poids de *Duke* sont $\leq p^2-1$ (attention, pour $p=2$, on doit modifier la définition de *Duke* en remplaçant 4 par 3).

Bien sûr, on aimerait pouvoir préciser (19), et dire lequel des deux entiers en question est égal à $k(\rho_a)$; cela exige la connaissance des sous-espaces $W_k$ des $S_k$, i.e. il faut d'abord savoir répondre à (16).

(20) Une question n'ayant rien à voir avec les quaternions, mais naturelle dans le contexte des poids:

Partons d'une $f \in M_k$, avec $k = 1$, fonction propre des opérateurs de Hecke, et soit $\rho$ la représentation galoisienne correspondante. *Est-il vrai que $\rho$ est non ramifiée en $p$?* C'est clair si $f$ se relève en une forme de poids 1 en caractéristique 0, mais il s'agit ici de formes "au sens de Katz", qui n'ont aucune raison de se relever en caractéristique 0. Il faut donc une démonstration spéciale. Comment faire? La question est liée à (16) dans le cas particulier $k = 1$: comment caractériser $W_1 = M_1$ à l'intérieur de l'espace beaucoup plus grand $S_1$?

Bien sûr, on aurait envie que la réciproque soit vraie: si $\rho$ est non ramifiée en $p$, elle devrait provenir de $M_1$. Je manque fâcheusement d'exemples numériques pour ce genre de situation. Même le cas diédral (par exemple celui où $p = 2$ et $\mathrm{Im}(\rho) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_2) = \mathrm{S}_3$) n'est pas évident.

[Cette question a été en grande partie résolue par B. Gross (*Duke Math. J.*, **61** (1990), 445–517) et R.F. Coleman–J.F. Voloch (*Invent. math.*, **110** (1992), 263, 281). Voir là-dessus B. Edixhoven, *Invent. math.* **109** (1992), 563–594.]

(21) Tout ceci amène à regarder *la structure de $D_A^\times$-module* de l'espace $F$ des fonctions localement constantes (à valeurs dans $\overline{\mathbf{F}}_p$) sur l'espace homogène $D_A^\times / D_\mathbf{Q}^\times$. Je connais trop mal la théorie complexe pour être certain des bonnes questions à poser. En tout cas, on peut se donner un caractère central $\omega$, et se borner à regarder le sous-espace $F_\omega$ de $F$ formé des fonctions $f$ telles que $f(xy) = \omega(x)f(y)$ pour tout $x$ du centre de $D_A^\times$. La somme directe des $F_\omega$ est distincte de $F$, mais ce n'est pas grave: tout sous-module simple de $F$ est contenu dans un $F_\omega$. Au sujet des $F_\omega$, on aimerait qu'ils contiennent "suffisamment" de sous-modules simples. Par exemple:

(22) *Tout sous-$D_A^\times$-module de $F_\omega$ distinct de* 0 *contient-il un sous-module simple*?
[La réponse est: non. Les seuls sous-modules simples de $F$ sont les sous-espaces de dimension 1 engendrés par les $\psi_D$, cf. (13). Voir lettre à Kazhdan ci-après.]

. . .

(24) Si un $(a_\ell)$ provient d'un niveau $N_1$, ainsi que d'un niveau $N_2$, *provient-t-il du niveau* $\mathrm{pgcd}(N_1, N_2)$ (en supposant ce pgcd $\geq 3$, pour ne pas avoir d'ennuis)? Ce serait un théorème "à la Ribet". Cela devrait pouvoir se démontrer si l'on avait de bonnes réponses aux questions posées dans (21).

(25) *Relations avec la théorie d'Eichler.* Une façon d'attaquer l'espace $F$ de tout à l'heure (celui des fonctions localement constantes sur $D_A^\times/D_{\mathbf{Q}}^\times$) consiste à le regarder comme la réduction $(\mathrm{mod}\, p)$ de l'espace des fonctions (complexes, si l'on veut -- ou à valeurs entières, si l'on préfère) localement constantes sur le même espace. Aux questions de niveaux près, cela revient à regarder les $T_\ell$ comme des "matrices de Brandt", ou plutôt comme la réduction $(\mathrm{mod}\, p)$ des matrices de Brandt. Grâce à Eichler, nous savons que cela donne le même semi-simplifié qu'un certain espace de poids 2 sur "$\Gamma_0(p)$ en niveau $N$", du moins pour $k$ divisible par $p+1$. D'où une autre façon de comparer cet espace à celui des formes modulaires $(\mathrm{mod}\, p)$. A vrai dire, je suis trop peu familier avec la théorie d'Eichler (surtout avec les niveaux $\pi$ et $N$ utilisés ici) pour pouvoir énoncer la correspondance de façon précise. Mais cela ne devrait pas être difficile à des spécialistes (Gross, Ribet, Marie-France).

(26) *Analogues p-adiques.* Au lieu de regarder les fonctions localement constantes sur $D_A/D_{\mathbf{Q}}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, il serait plus amusant de regarder celles à *valeurs p-adiques*, i.e. à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Si l'on décompose $A$ en $\mathbf{Q}_p \times A'$, on leur imposerait d'être localement constantes par rapport à la variable dans $D_{A'}$ et d'être continues (ou analytiques, ou davantage) par rapport à la variable dans $D_p$... Y aurait-il des représentations galoisiennes $p$-adiques associées à de telles fonctions, supposées fonctions propres des opérateurs de Hecke? Peut-on interpréter les constructions de Hida (et Mazur) dans un tel style? Je n'en ai aucune idée.

(27) *Généralisations.* On peut prolonger ce "day-dreaming" en demandant quels groupes algébriques peuvent remplacer $D^\times$ dans ce qui précède. Une chose est sûre: il faut une condition de "compacité" à l'infini.

...

J-P. Serre

PS—Il se peut que tous mes $k$ doivent être remplacés par $-k$, et autres choses du même genre; il y a des conventions variées qui sont possibles, et je n'ai pas encore choisi.

**Lettre de J-P. Serre à D. Kazhdan, 6 juin 1989**

Cher Kazhdan,

Voici, comme promis, la démonstration du th. 2 de mon *Résumé de Cours* 1987–1988.

Je garde les notations de ce résumé:

$p$ est un nombre premier;

$D$ est le corps de quaternions de centre $\mathbf{Q}$ ramifié en $p, \infty$;

$G$ est le groupe multiplicatif de $D$, vu comme groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$;

$G(A)$ est le groupe des points adéliques de $G$;

$G(\mathbf{Q})$ est le groupe des points rationnels de $G$, i.e. $D^\times$.

Je note $k$ le corps $\overline{\mathbf{F}}_p$ (ce n'est pas le poids !).

Enfin, je note $F$ le $k$-espace vectoriel des fonctions $f\colon G(A) \to k$ qui sont localement constantes et invariantes à droite par $G(\mathbf{Q})$. Le groupe $G(A)$ opère à gauche sur $F$: si $g \in G(A)$ et $f \in F$, on a

$$(g.f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{pour tout } x \in G(A).$$

On s'intéresse à la structure de $F$ comme $G(A)$-module; c'est un module admissible: les éléments fixés par un sous-groupe ouvert forment un $k$-espace vectoriel de dimension finie. Le th. 2 dit que *les seuls sous-modules simples de $F$ sont les modules de dimension* 1 *évidents* (et peu intéressants).

En fait, on démontrera quelque chose d'un peu plus précis, voir plus loin.

## §1. Préliminaires locaux

Je considère un corps local $K$, à corps résiduel fini à $q$ éléments, avec $(q,p) = 1$. Soit $G_K = \mathbf{GL}_2(K)$ et soit $G_0 = \mathbf{GL}_2(O_K)$, où $O_K$ est l'anneau des entiers de $K$.

Soit $\omega$ un caractère de $K^\times$, à valeurs dans $k^\times$, qui soit non ramifié, i.e. trivial sur $O_K^\times$. Soit d'autre part $a$ un élément de $k$. A ces données on peut associer de façon canonique un $k$-espace vectoriel $H_{a,\omega}$, muni d'une action de $G_K$ (continue, bien sûr), et d'un élément $e$ ayant les quatre propriétés suivantes:

(1) L'action de $G_K$ sur $H = H_{a,\omega}$ admet $\omega$ pour caractère central.

(2) L'élément $e \in H$ est fixé par $G_0$.

(3) Le transformé de $e$ par l'opérateur de Hecke $T$ est $a.e$.

(4) Le couple $(H, e)$ est universel pour les propriétés (1), (2), (3).

Une façon de définir $H$ consiste à introduire l'algèbre de Hecke

$$R(G_K, G_0) = \mathrm{End}_G\, k[G_K/G_0],$$

ainsi que son module de dimension 1 $I = I_{a,\omega}$ défini par $\{a, \omega\}$. On pose alors $H = k[G_K/G_0] \otimes I$, le produit tensoriel étant pris sur $R(G_K, G_0)$.

Lorsque $\omega = 1$ (cas auquel on peut se ramener par torsion), on peut donner une description très concrète de $H$ en termes de *l'arbre* $X$ de $\mathbf{PGL}_2(K)$: si $C_0 = C_0(X)$ désigne le $k$-espace vectoriel des 0-chaînes de $X$ à coefficients dans $k$, on a

$$H_{a,1} = C_0/(T - a)C_0,$$

où $T$ est l'opérateur "somme des sommets voisins".

La *structure* de $H$ n'est pas difficile à déterminer. On trouve:

(5) $H$ contient un unique sous-module simple $H'$.

(6) On a $H = H'$ si et seulement si $a \neq \pm(q+1)\omega(\pi)^{1/2}$, où $\pi$ est une uniformisante. (Lorsque $\omega = 1$, cela revient à dire que $a \neq \pm(q+1)$. )

(7) Dans le cas (que j'appellerai "exceptionnel") où $H \neq H'$, le quotient $H/H'$ est de dimension 1 si $q+1 \neq 0$ dans $k$, et de dimension 2 si $q+1 = 0$ dans $k$.

(8) L'action de $G_K$ sur $H/H'$ est abélienne. En particulier $\mathbf{SL}_2(K)$ opère trivialement sur $H/H'$.

(9) Aucun élément non nul de $H$ n'est invariant par $\mathbf{SL}_2(K)$.

J'aurai besoin d'un résultat précisant la propriété universelle de $H = H_{a,\omega}$. Soit $V$ un $G_K$-module lisse (i.e. à action continue) de caractère central $\omega$, et soit $W$ un $k$-sous-espace vectoriel de $V$ formé d'éléments invariants par $G_0$ et tels que $Tw = a.w$ pour tout $w \in W$ ($T$ étant l'opérateur de Hecke usuel). D'après (4) il existe un $G_K$-homomorphisme

$$\varphi\colon W \otimes_k H_{a,\omega} \to V,$$

et un seul, tel que $\varphi(w \otimes e) = w$ pour tout $w \in W$.

Proposition 1: *Supposons qu'aucun élément non nul de $V$ ne soit fixé par $\mathbf{SL}_2(K)$. Alors $\varphi\colon W \otimes H_{a,\omega} \to V$ est injectif.*

(Ce résultat sera surtout intéressant dans le cas où $H_{a,\omega}$ n'est pas simple.)

*Démonstration:* Soit $N$ le noyau de $\varphi\colon W \otimes H \to V$, et soit $N' = N \cap W \otimes H'$, où $H'$ est l'unique sous-module simple de $H$, cf. (5). Du fait que $H'$ est simple, le lemme de Schur est applicable (facile) et l'on en déduit par un argument standard (*Bourbaki* A.VIII, §1, n°. 5) que les sous-modules de $W \otimes H'$ sont de la forme $W' \otimes H'$, où $W'$ est un sous-espace vectoriel de $W$. En appliquant ceci à $N'$, on voit que $N'$ est de la forme $W' \otimes H'$. Si $w \in W'$, l'application de $H$ dans $V$ définie par $h \mapsto \varphi(w \otimes h)$ est nulle sur $H'$, donc se factorise en $H/H' \to V$. Mais $\mathbf{SL}_2(K)$ opère trivialement sur $H/H'$, cf. (8); vu l'hypothèse faite sur $V$, cela entraîne que $\varphi(w \otimes h) = 0$ pour tout $h \in H$. Prenant $h = e$, on a $w = \varphi(w \otimes e) = 0$. Ceci montre que $W' = 0$, autrement dit que $N$ ne rencontre $W \otimes H'$ qu'en 0, donc est isomorphe à un sous-module de $W \otimes (H/H')$. En appliquant encore (8), on voit que $\mathbf{SL}_2(K)$ opère trivialement sur $N$. Mais $\mathbf{SL}_2(K)$ ne fixe aucun élément non nul de $H$ (cf. (9)), donc aucun élément non nul de $W \otimes H$. On a donc $N = 0$, cqfd.

## §2. Préliminaires globaux

Je reviens aux notations du début. Pour tout $\ell$ premier $\neq p$, le groupe $G = G(\mathbf{Q}_\ell)$ est isomorphe à $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ et je note $G_{0,\ell}$ le groupe de ses points entiers (relativement à un ordre maximal choisi), de sorte que $G_{0,\ell} = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ et que la situation est celle du §1.

Je note SG le sous-groupe de $G$ noyau de la norme réduite Nrd: $G \to \mathbf{G}_m$. On a $\mathrm{SG}(\mathbf{Q}_\ell) = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ si $\ell \neq p$.

LEMME: *Si $f \in F$ est invariant par* $\mathrm{SG}(\mathbf{Q}_\ell)$ *pour un $\ell \neq p$, il est invariant par le groupe adélique* $\mathrm{SG}(A)$.

En effet, d'après le théorème d'approximation forte d'Eichler–Kneser, le sous-groupe de $\mathrm{SG}(A)$ engendré par $\mathrm{SG}(\mathbf{Q})$ et $\mathrm{SG}(\mathbf{Q}_\ell)$ est dense.

Je vais maintenant m'intéresser à une représentation admissible $V$ de $G(A)$, non nécessairement contenue dans $F$, sur laquelle je ferai les hypothèses suivantes:

(a) $V \neq 0$.

(b) $V = V_\omega$ *pour un caractère central* $\omega$.

(c) *Si $\ell \neq p$,* $\mathrm{SG}(\mathbf{Q}_\ell)$ *ne fixe aucun élément $\neq 0$ de $V$.*

Je vais montrer que $V$ contient un produit tensóriel de modules locaux du type $H$ (cf. §1).

On commence par choisir un sous-groupe ouvert $U$ de $G(A)$ tel que le sous-espace $V^U$ fixé par $U$ soit $\neq 0$. On peut supposer que $U$ est un produit $\Pi U_\ell$ où les $U_\ell$ sont des sous-groupes ouverts des $G(\mathbf{Q}_\ell)$ ($\ell$ premier, ou $\ell = \infty$), avec $U_\ell = G_{0,\ell}$ pour tout $\ell \notin S$, où $S$ est un ensemble fini contenant $p$ et $\infty$. Les opérateurs de Hecke $T_\ell$ ($\ell \notin S$) opèrent sur $V^U$, qui est de dimension finie. On peut donc choisir un vecteur propre $v \neq 0$ commun à tous ces opérateurs, soient $a_\ell$ ($\ell \notin S$) les valeurs propres correspondantes. Soit $W$ le sous-espace de $V$ formé des $x \in V$ qui sont fixés par tous les $G_{0,\ell}$ ($\ell \notin S$) et sont tels que $T_\ell x = a_\ell x$ pour tout $\ell \notin S$. Si l'on note $G_S$ le produit des $G(\mathbf{Q}_\ell)$ pour $\ell \in S$ (y compris $p, \infty$), il est clair que $W$ est un $G_S$-module admissible, et l'on a $W \neq 0$ puisque $W$ contient $v$.

Pour tout $\ell \notin S$, soit $H(\ell) = H_{a_\ell,\omega_\ell}$ le $G(\mathbf{Q}_\ell)$-module universel construit au §1 et relatif à la valeur propre $a_\ell$ et au caractère local $\omega_\ell$; soit $e(\ell)$ le vecteur canonique correspondant. La donnée des $e(\ell)$ permet de définir le *produit tensoriel infini*

$$H = \bigotimes_{\ell \notin S} H(\ell).$$

On obtient ainsi un $G(A_S)$-module admissible, où $G(A_S)$ désigne le produit restreint des $G(\mathbf{Q}_\ell)$ pour $\ell \notin S$.

Comme $G(A) = G_S \times G(A_S)$, on a une structure naturelle de $G(A)$-module sur le produit tensoriel $W \otimes H$. De plus, les propriétés universelles des $H(\ell)$ montrent qu'il existe un unique homomorphisme

$$\Phi\colon W \otimes H \to V$$

tel que $\Phi(w \otimes e_H) = w$ pour tout $w \in W$ ($e_H$ désignant l'élément de $H$ produit tensoriel des $e(\ell)$).

PROPOSITION 2: *L'homomorphisme $\Phi\colon W \otimes H \to V$ est injectif.*

Soient $\ell_1 < \ell_2 < \cdots$ les nombres premiers non contenus dans $S$. D'après la prop. 1, $W \otimes H(\ell_1) \to V$ est injectif. Le même argument, appliqué à $W \otimes H(\ell_1)$, montre que $W \otimes H(\ell_1) \otimes H(\ell_2) \to V$ est injectif. Etc.

COROLLAIRE: *Si l'un des $(a_\ell, \omega_\ell)$ est exceptionnel* (au sens du §1), *$V$ n'est pas simple. Si une infinité des $(a_\ell, \omega_\ell)$ sont exceptionnels, $V$ n'est pas de longueur finie.*

En effet, si $r$ des $(a_\ell, \omega_\ell)$ sont exceptionnels, la longueur du produit tensoriel des $H(\ell)$ correspondants est $\geq 2^r$ et il en est *a fortiori* de même de $H$, de $W \otimes H$, et de $V$.

## §3. Fin de la démonstration

Je conserve les hypothèses sur $V$ du §2 et je suppose que *$V$ est un sous-$G(A)$-module de $F$*. Soient $S$, $a_\ell$, $\omega_\ell$ comme ci-dessus. On sait alors (grâce au dictionnaire fourni par le th. 1 du "Résumé") qu'il existe une *représentation galoisienne* continue

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathbf{GL}_2(k),$$

à image finie, qui correspond à $S$, $a_\ell$, $\omega_\ell$ au sens suivant:

- $\rho$ est non ramifiée en dehors de $S$;

- le déterminant de $\rho$ est $\chi\omega$, où $\chi$: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathbf{F}_p^\times$ est le caractère cyclotomique;

- si $\ell \notin S$, on a $\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell$.

D'après le théorème de densité de Chebotarev, il existe une infinité de $\ell$ tels que $\mathrm{Frob}_\ell$ soit contenu à la fois dans le noyau de $\rho$ et de $\chi$. Pour un tel $\ell$, le caractère local $\omega_\ell$ est égal à 1, on a $a_\ell = 2$ et $\ell$ est égal à 1 dans $k$; l'équation "$a = q + 1$" du §1, (6) est satisfaite (puisque $q = \ell$): $\ell$ est exceptionnel. Vu le cor. à la prop. 2, ceci démontre:

PROPOSITION 3: *Tout sous-module $V$ de $F$ satisfaisant aux conditions* (a), (b), (c) *du* §2 *est de longueur infinie.*

Le th. 2 de mon "Résumé" est maintenant à peu près évident. En effet, si $V$ est un sous-module simple de $F$, la prop. 3 montre qu'il existe $\ell \neq p, \infty$ tel que $\mathrm{SG}(\mathbf{Q}_\ell)$ fixe un élément $\neq 0$ de $V$, donc $V$ tout entier puisque $V$ est simple. D'après le lemme 1, $V$ est alors fixé par $\mathrm{SG}(A)$, d'où facilement le fait que $V$ est de dimension 1, et engendré par un caractère de degré 1.

Vous remarquerez le rôle essentiel joué par les représentations galoisiennes dans cette démonstration. C'est grâce à elles (et au théorème de Chebotarev) que l'on peut prouver le point crucial, qui est l'existence d'une infinité de $\ell$ exceptionnels. Le reste de la démonstration est essentiellement formel.

...

J-P. Serre

PS—La correspondance "valeurs propres de Hecke" $\leftrightarrow$ "représentations galoisiennes" fait intervenir des *signes* ($\chi$ ou $\chi^{-1}, \omega$ ou $\omega^{-1}$) qui dépendent des conventions adoptées pour les Frobenius, le corps de classes, les opérateurs de Hecke et le genre des modules (à gauche ou à droite).

**Appendix** (R. Livné, November 1995)

### Further remarks and further developments

In addition to giving modular forms (mod $p$) a quaternion interpretation, the letters suggest the study of representations of local and adelized groups. We begin with remarks on modular forms (mod $p$) and quaternions, then on representation theory.

*Question (24) in the letter to Tate:* The two letters above were written in connection with question 4.3 in [11]. In that paper Serre formulated conjectures relating odd irreducible Galois representations over $\mathbf{Q}$ with modular forms. The part of these conjectures related to the weight and conductor is now known in odd characteristics (see the report [9] and also [4]). As a result, much is known about question (24), at least if one works with the $\Gamma_1(N)$- rather than the $\Gamma(N)$-level structure. See [9, Theorems 3.1 and 4.2] and [5].

*Question (25) in the letter to Tate:* In [6] the Eichler–Brandt theory of any definite quaternion algebra $B$ is developed over $\mathbf{Z}[1/q]$, where $q$ is any prime at which $B$ splits. In particular Serre's space $F$ is the reduction (mod $p$) of an integral model for a certain space of weight two modular forms on a quaternion algebra of discriminant $p$. This is an instance of the well-known fact that all systems of eigenvalues are found in weight two.

*Question (26) in the letter to Tate:* In [13] $p$-adic representations and mod $p$ representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ are related to the geometry of Shimura curves. It is possible to adelize the construction given there. I am not aware of results concerning $p$-adic Galois representations.

*Question (27) in the letter to Tate:* An approach to forms (mod $p$) on groups other than $\mathbf{GL}_2$ and their connections with Galois representations is being developed by B. Gross.

*Other quaternion algebras:* It seems likely one can carry out an analogous study of forms on a rational definite algebra of an arbitrary discriminant. See [6], [8].

*Local representations:* In the letter to Kazhdan, Serre studies certain modules of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ in characteristic $p \neq \ell$. These are the unramified representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ containing an eigenvector of the Hecke operator with a given eigenvalue which are universal for this property. (An unramified representation is one containing a vector fixed by a maximal compact subgroup.) These representations were studied in his course at the Collège de France 1987–1988. Some of their properties are mentioned in the letter to Kazhdan. Similar arguments (for $\ell = p$) also show up in [1] (see also [2]). A general study of representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ in characteristic $p \neq \ell$ was made by Vignéras in [14].

*Multiplicity questions:* Over $\mathbf{C}$, the classical Aktin–Lehner–Li theory of newforms can be reformulated in the language of representations as the "strong multiplicity one" property. In characteristic $p$ one might ask for the multiplicity in which a given system of Hecke eigenvalues appears in the space of forms of a given weight and level. This would amplify known existence results ([5]). Representation methods might prove useful here.

*Bad primes:* Over $\mathbf{C}$ the study of primes dividing the level is considerably deepened and clarified by the Langlands correspondence between representations of $\mathbf{GL}_2(F)$ over a local field $F$ and two-dimensional representations of $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. The analogue of this correspondence for (mod $p$) representations for $F = \mathbf{Q}_\ell$, $p \neq \ell$ was worked out by Vignéras ([14]), and later used by her (in an unpublished letter to Fontaine) to answer a part of one of Serre's questions ([11, 3.2.6?]).

## References

[1] L. Barthel and R. Livné, *Modular representations of* $\mathrm{GL}_2$ *of a local field: the ordinary, unramified case*, Journal of Number Theory **55** (1995), 1–27.

[2] L. Barthel and R. Livné, *Irreducible modular representations of* $\mathrm{GL}_2$ *of a local field*, Duke Mathematical Journal **75** (1994), 261–292.

[3] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions* $L$, in Lecture Notes in Mathematics **349**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 501–597.

[4] F. Diamond, *The refined conjecture of Serre*, in *Elliptic Curves, Modular Forms, & Fermat's Last Theorem* (J. Coates and S.T. Yau, eds.), International Press, Cambridge, 1995, pp. 22–37.

[5] F. Diamond and R. Taylor, *Non-optimal levels of* mod $\ell$ *modular representations*, Inventiones mathematicae **115** (1994), 435–462.

[6] B.W. Jordan and R. Livné, *Integral Hodge theory and congruences between modular forms*, Duke Mathematical Journal **80** (1995), 419–484.

[7] N. Katz, *p-adic properties of modular schemes and modular forms*, in Lecture Notes in Mathematics **350**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 69–190.

[8] K.A. Ribet, *Bimodules and abelian surfaces*, Advanced Studies in Pure Mathematics **17**, Academic Press, New York, 1989, pp. 359–407.

[9] K.A. Ribet, *Report on mod $\ell$ representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **55** (1994), Part II, 639–676.

[10] G. Robert, *Congruences entre séries d'Eisenstein dans le cas supersingulier*, Inventiones mathematicae **61** (1980), 103–158.

[11] J-P. Serre, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Mathematical Journal **54** (1987), 179–230.

[12] J-P. Serre, *Résumé des cours de 1987–1988*, Annuaire du Collège de France (1988), 79–82.

[13] J. Teitelbaum, *Modular representations of* $\mathrm{PGL}_2$ *and automorphic forms for Shimura curves*, Inventiones mathematicae **113** (1993), 561–580.

[14] M.-F. Vignéras, *Représentations modulaires de* $\mathrm{GL}(2,F)$ *en caractéristique* $\ell$, $F$ *corps p-adique*, $p \neq \ell$, Compositio Mathematica **72** (1989), 33–66.